1 Loi de probabilité

1.1 Définitions

Définition : On appelle expérience aléatoire toute expérience ayant plusieurs issues (ou éventualités) possibles et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.
Ces éventualités sont notées e_1 ; e_2 ; ... ; e_n.
Leur ensemble noté Ω est appelé univers.
On a donc $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n\}$.

Exemple : On lance un dé à 6 faces.
L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définitions :
— Chaque éventualité e_i est affectée d'une probabilité, c'est-à-dire d'un nombre noté p_i tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

— On appelle loi de probabilité la donnée des p_i vérifiant ces conditions.
— Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables, ou que la loi de probabilité p est équiprobable (ou équirépartie).

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré. Chaque face ayant les mêmes chances d'apparaître, chaque éventualité a une probabilité de $\frac{1}{6}$. La loi de probabilité est donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : De manière générale, si une expérience aléatoire est équiprobable et comporte n issues différentes, chacune des issues a une probabilité de $\frac{1}{n}$.

1.2 Modélisation d'expérience aléatoire

Définition 1 : Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Remarque : Lien avec les fréquences
Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement devient proche de sa probabilité.

<u>Activité Algorithmique</u> : simulation du hasard avec Python - voir fiche qui sera distribuée.

2 Probabilité d'un événement

2.1 Vocabulaire des événements

Définition 2:
Un événement A est une partie de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).
$\varnothing$ est l'événement impossible.
Ω est l'événement certain.

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré.

— Des exemples d'événement :

A : « Obtenir un nombre pair »

B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »

B' : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 »

C : « Obtenir 7 »

D : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »

On a :
- $A = \{2\,;4\,;6\}$
- $B = \{1\,;2\}$
- $B' = \{5\,;6\}$
- $C = \varnothing$ (événement impossible)
- $D = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\} = \Omega$ (événement certain)

Définition 3 : Soient A et B deux événements d'un univers Ω .
- L'événement $A \cap B$ est l'événement « A et B ».
- L'événement $A \cup B$ est l'événement « A ou B ».
- L'événement $\overline{A}$ est l'événement « contraire de A » ou « non A ».
- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent.
- $A \cap B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair inférieur ou égal à 2 ».
  $A \cap B = \{2\}$
- $A \cup B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 2 ».
  $A \cup B = \{1\,;2\,;4\,;6\}$
- $\overline{A}$ est l'événement « Obtenir un nombre impair ».
  $\overline{A} = \{1\,;3\,;5\}$
- Les événements B et B' sont incompatibles.

2.2 ÉquiProbabilité

Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p_i = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad p\,(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété 1 :

Si A est un événement :

$$p(\overline{A}) = 1 - p\,(A)$$

Propriété 2 :

1. Si A et B sont deux événements :

$$p\,(A \cup B) = p\,(A) + p\,(B) - p\,(A \cap B)$$

2. Si les événements A et B sont incompatibles :

$$p\,(A \cup B) = p\,(A) + p\,(B)$$